

TP4D-1: 5ª feira, 17/06, 14h ; TP4D-2: 5ª feira, 17/06, 16h ; TP4D-3: 6ª feira, 18/06, 11h ; TP4D-4: 4ª feira, 16/06, 10h30 ; TP4D-5: 6ª feira, 18/06, 14h

- Notas: 1) Passar para o caderno ou imprimir esta planificação e estudá-la antes da aula.  
 2) A aula será essencialmente dedicada à resolução dos exercícios apresentados.  
 3) Depois da aula consolidar a matéria estudando as páginas 93 a 100 dos apontamentos teóricos e resolver os TPCs indicados no final desta planificação.

### Início da aula: Realização do mini teste 2

Recordar: **Integrais Impróprios de 1ª espécie**  $\rightsquigarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx$   
 (cálculo 1)

$\rightarrow$  converge com valor  $l$  se  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx = l \in \mathbb{R}$

$\rightarrow$  diverge se  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$  é infinito ou não existe

Slides 3 a 5

### Transformadas de Laplace (T.L.)

**Definição:** Seja  $f: [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ . A transformada de Laplace de  $f$  é a função  $\mathcal{L}\{f\}$  definida por

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

para os pontos  $s \in \mathbb{R}$  em que este integral impróprio converge.

Notações:  $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$  ou  $\mathcal{L}\{f\}(s)$  ou  $F(s)$

**Aplicações das T.L.:** circuitos elétricos, problemas de condução de calor, reações químicas, resolução de EDOs, etc.

**Exercício 1:** Usar a definição para determinar as transformadas de Laplace de:

a)  $f(t) = 1$

b)  $f(t) = t$

Nota: A partir daqui vão precisar do formulário enviado por email

### Slide 6 Linearidade da T.L.

**Teorema:** Sejam  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $f, g: [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ . Suponha-se que existem

$\mathcal{L}\{f\}(s)$  para  $s > s_f$  e  $\mathcal{L}\{g\}(s)$  para  $s > s_g$ . Então:

(i)  $\mathcal{L}\{f+g\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) + \mathcal{L}\{g\}(s)$ ,  $s > \max\{s_f, s_g\}$

(ii)  $\mathcal{L}\{\alpha f\}(s) = \alpha \mathcal{L}\{f\}(s)$ ,  $s > s_f$

**Exercício 2:** Determinar a transformada de Laplace das funções:

a)  $f(t) = t^2 + \cos(3t) + \pi$

b)  $g(t) = 3e^{-2t} + \sin(t/6) + \cosh(4t)$

c)  $j(t) = t^{10} + \frac{e^t}{3} + \cos^2(t)$

**Exercício 3:** Calcular o valor do integral impróprio  $\int_0^{+\infty} t^{10} e^{-2t} dt$ .

### Slides 7 a 10 Existência da T.L.

Nota: Há funções que não admitem T.L. Por exemplo,  $f(t) = e^{t^2}$  não tem T.L. uma vez que o integral impróprio  $\int_0^{+\infty} e^{t^2} e^{-st} dt$  é divergente  $\forall s \in \mathbb{R}$ .

**Definição:** Sejam  $f: [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  e  $k \in \mathbb{R}$ .  $f$  diz-se uma função de ordem exponencial  $k$  à direita se existem constantes  $M > 0$  e  $T > 0$  tais que

$$|f(t)| \leq M e^{kt}, \quad \forall t \geq T.$$

**Teorema:** Se  $f: [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função seccionalmente contínua e  $f$  é de ordem exponencial  $k$  (para algum  $k \in \mathbb{R}$ ) então  $\mathcal{L}\{f\}(s)$  existe para  $s > k$ . ← Ver aula 8

→ Ver exemplos e observações nos slides 9 e 10

**Exercício 4:** Seja  $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \geq 5 \\ 9x & \text{se } 0 \leq x < 5 \end{cases}$

a) Justifique que  $f$  admite transformada de Laplace.

b) calcule  $\mathcal{L}\{f\}(s)$

Slides 11 e 12 Propriedades da T.L.

Propriedade 1: Deslocamento da transformada

Sejam  $f: [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  integrável em todo o intervalo  $[0, b]$ ,  $b > 0$ , e  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Se  $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$  existe para  $s > s_f$ , então

$$\mathcal{L}\{e^{\lambda t} f(t)\} = F(s - \lambda), \text{ para } s > s_f + \lambda$$

Exercício 5: Determinar a T.L. das funções

a)  $f(t) = e^{2t} t^2$

b)  $f(t) = e^{-3t} \text{sen}(2t)$

c)  $f(t) = e^{-t} \text{cosh}(ut)$

Propriedade 2: Transformada do deslocamento

Nota: Função de Heaviside  $\rightarrow$  ver gráficos enviados por email

$$\hookrightarrow H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} \quad H_a(t) = H(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t \geq a \end{cases}$$

Sejam  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  integrável em todo o intervalo  $[0, b]$ ,  $b > 0$ , e  $H_a(t)$  a função de Heaviside em  $t = a$ . Se  $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$  existe para  $s > s_f$ , então,  $\forall a \in \mathbb{R}^+$

$$\mathcal{L}\{H_a(t) f(t-a)\}(s) = e^{-as} F(s), \text{ para } s > s_f$$

Exercício 6: Determinar a T.L. das funções

a)  $f(t) = H(t-3) e^{5(t-3)}$

b)  $f(t) = H_2(t) \times (t-2)^5$

c)  $f(t) = H(t-5) \times (3t)$

d)  $f(t) = H_{\pi}(t) \cos t$

**Propriedade 3: Transformada da expansão/contração**

Seja  $f: [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  integrável em todo o intervalo  $[0, b]$ ,  $b > 0$ .

Se  $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$  existe para  $s > s_f$ , então, para todo  $a \in \mathbb{R}^+$ ,

$$\mathcal{L}\{f(at)\}(s) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \text{ para } s > a \cdot s_f$$

Nota: Ver exemplo 5.9. da pág 100 dos apontamentos teóricos

**Propriedade 4: Transformada da convolução**

↳ esta matéria não será avaliada nos testes/exames

**Definição:** O produto de convolução de duas funções  $f$  e  $g$ , caso o integral exista, define-se por:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du, t \geq 0$$

Se  $f$  e  $g$  são funções de ordem exponencial  $s_0$ , para algum  $s_0 \in \mathbb{R}$ , e seccionalmente contínuas em  $[0, +\infty[$ , então

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\}(s) = F(s)G(s), s > s_0,$$

onde  $F$  e  $G$  são as T.L. de  $f$  e  $g$ , respetivamente

**Exemplo resolvido 1:** calcular:

Ver resolução no email

a)  $\mathcal{L}\left\{\int_0^t u^2 \cos(t-u) du\right\}(s)$

b)  $\mathcal{L}\left\{\int_0^t (t-x)^5 \sinh(-2x) dx\right\}(s)$

TPCs: Folha prática 5: 1 a), b), c), d), f)

1) Transformada da convolução:  $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)g(t-u)du\right\}(s) = F(s) \times G(s)$

a)  $\mathcal{L}\left\{\int_0^t u^2 \cos(t-u) du\right\}(s) = F(s) \times G(s) = \frac{2}{s^3} \times \frac{s}{s^2+1} = \frac{2}{s^2(s^2+1)}, s > 0$

$\uparrow$   $f(u)$   $\quad$   $\uparrow$   $g(t-u)$   
 Propriedade 4

Logo:  $f(t) = t^2 \rightarrow F(s) = \mathcal{L}\{t^2\}(s) = \frac{2}{s^3}, s > 0$

$g(t) = \cos(t) \rightarrow G(s) = \mathcal{L}\{\cos(t)\}(s) = \frac{s}{s^2+1}, s > 0$

b)  $\mathcal{L}\left\{\int_0^t (t-x)^5 \sinh(-2x) dx\right\}(s) = F(s) \times G(s) = \frac{-2}{s^2-4} \times \frac{5!}{s^6}, s > 2$

$\uparrow$   $f(x)$   $\quad$   $\uparrow$   $g(t-x)$   
 Prop. 4

Logo:  $f(t) = \sinh(-2t) \rightarrow F(s) = \mathcal{L}\{\sinh(-2t)\}(s) = \frac{-2}{s^2-(-2)^2}, s > |-2| = \frac{-2}{s^2-4}, s > 2$

$g(t) = t^5 \rightarrow G(s) = \mathcal{L}\{t^5\}(s) = \frac{5!}{s^6}, s > 0$

(6)

## Capítulo 6

# Transformada de Laplace

### 6.1 Definição da transformada de Laplace

A transformada de Laplace de uma função  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  é a função  $\mathcal{L}\{f\}$  definida por

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt,$$

para os valores de  $s \in \mathbb{R}$  onde o integral converge.

**Exemplo 6.1.1.** Determinar a transformada de Laplace da função  $f(t) = t$ .  
Calcula-se o integral impróprio de 1ª espécie

$$\int_0^{+\infty} te^{-st} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x te^{-st} dt$$

Usando a integração por partes, considerando  $u' = e^{-st}$  e  $v = t$  (consequentemente,  $u = -\frac{1}{s}e^{-st}$  e  $v' = 1$ ) vem

$$\int_0^x te^{-st} dt = \left[ -\frac{1}{s}e^{-st} t \right]_0^x - \int_0^x -\frac{1}{s}e^{-st} dt = \left[ -\frac{1}{s}e^{-st} t \right]_0^x + \frac{1}{s} \int_0^x e^{-st} dt = \left[ -\frac{1}{s}e^{-st} t \right]_0^x - \left[ \frac{1}{s^2}e^{-st} \right]_0^x$$

Substituindo agora  $t$  pelos valores 0 e  $x$  vem,

$$\int_0^x te^{-st} dt = \left( -\frac{1}{s}e^{-sx} x + \frac{1}{s}e^0 0 \right) - \left( \frac{1}{s^2}e^{-sx} - \frac{1}{s^2}e^0 \right) = -\frac{1}{s}e^{-sx} x - \frac{1}{s^2}e^{-sx} + \frac{1}{s^2}$$

Tomando agora o limite,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x te^{-st} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{s}e^{-sx} x - \frac{1}{s^2}e^{-sx} + \frac{1}{s^2} \right) = \frac{1}{s^2}, \quad s > 0$$

Note-se que se  $s > 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{s}e^{-sx} x - \frac{1}{s^2}e^{-sx} \right) = -\frac{1}{s} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \frac{1}{s}}{e^{sx}} = 0^{(1)}$$

Se  $s < 0$ ,  $-sx$  tende para  $+\infty$  e portanto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{s}e^{-sx} x - \frac{1}{s^2}e^{-sx} \right) = -\frac{1}{s} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x + \frac{1}{s} \right) e^{-sx} = +\infty$$

Por último, se  $s = 0$

$$\int_0^{+\infty} te^{-st} dt = \int_0^{+\infty} te^0 dt = \int_0^{+\infty} t dt$$

Este integral é divergente, já que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x t dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2} = +\infty$$

---

<sup>1</sup>Podem usar a regra de Cauchy para levantar a indeterminação

Se  $s \leq 0$  o integral impróprio é divergente. Se  $s > 0$  o integral impróprio é convergente e o seu valor é  $\frac{1}{s^2}$ . Podemos então concluir que a transformada de Laplace de  $f(t) = t$  é

$$\mathcal{L}\{t\}(s) = \frac{1}{s^2}, \quad s > 0$$

**Exercício 6.1.1** Calcule as transformadas de Laplace das seguintes funções, indicando os respectivos domínios.

1.  $f(t) = 1$ .
2.  $f(t) = e^t$ .

## 6.2 Existência da Transformada de Laplace

Seja  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ . Suponhamos que

1.  $f$  é seccionalmente contínua em  $[0, +\infty[$ ;<sup>2</sup>
2.  $f$  é de **ordem exponencial à direita**, isto é, existem  $a \in \mathbb{R}$ ,  $M > 0$  e  $T > 0$  tais que

$$|f(t)| \leq M e^{at}, \quad \forall t \geq T.$$

Então  $\mathcal{L}\{f\}(s)$  existe para  $s > a$ .

**Exemplo 6.2.1.** Vamos mostrar que a transformada de Laplace da função

$$f(x) = \begin{cases} 8 & \text{se } x \geq 1 \\ -3x & \text{se } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

é

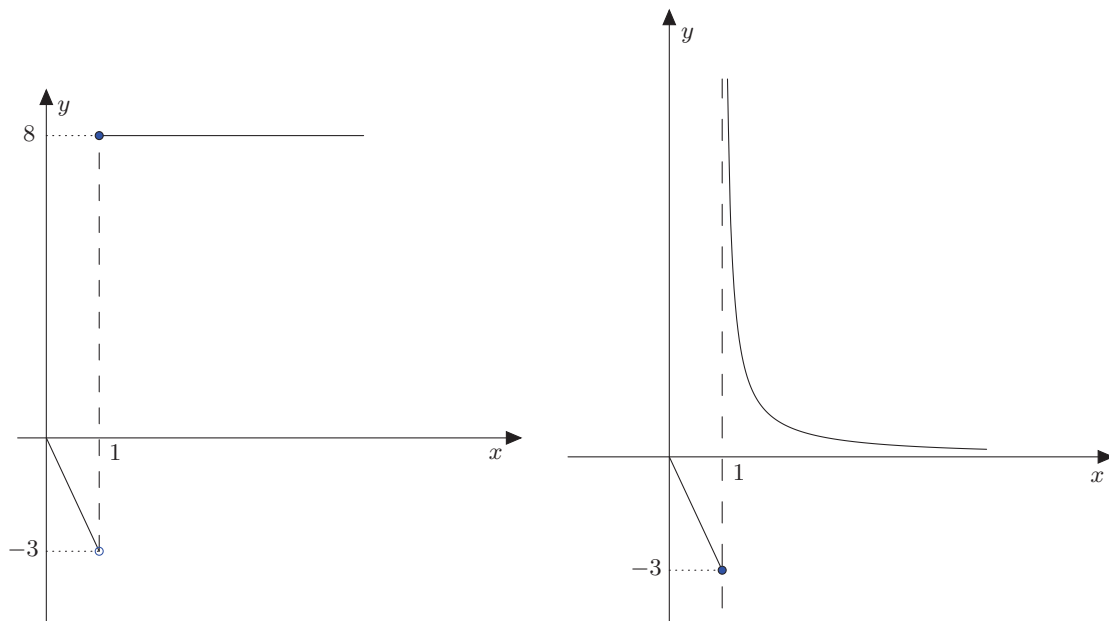
$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \frac{(11s - 3e^s + 3)e^{-s}}{s^2}$$

Note-se que  $f$  é seccionalmente contínua (apenas apresenta um ponto de descontinuidade em  $x = 1$  e é limitada em qualquer intervalo  $[0, b]$ ,  $b > 0$ ) e ainda que  $f(x) \leq 8, \forall x \geq 0$ .

Assim, tomando  $M = 8$  e  $a = 0$ , para qualquer  $T > 0$  se verifica a desigualdade

$$|f(x)| \leq M e^{ax}, \quad \forall x \geq T$$

<sup>2</sup> Uma função  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se seccionalmente contínua em  $[0, +\infty[$  se o conjunto dos seus pontos de descontinuidade é um conjunto numerável e a função é limitada em qualquer intervalo  $[0, b]$ ,  $b > 0$ .



seccionalmente contínua

não seccionalmente contínua

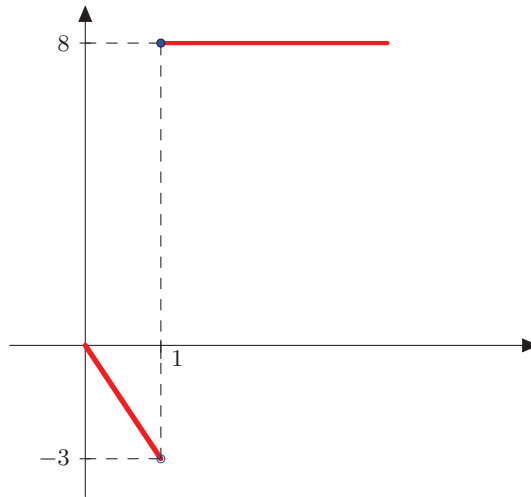


Figura 6.1: Gráfico da função  $f$ .

portanto,  $f$  admite transformada de Laplace.

Dada uma função  $f$  definida em  $I = [0, +\infty[$ , a sua transformada de Laplace é uma função de  $s$ ,  $F(s)$ , dada pelo integral impróprio

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x) dx$$

para os valores de  $s$  para os quais o integral é convergente.

Como  $f$  é uma função definida por ramos, vem

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x) dx = \int_0^1 -3xe^{-sx} dx + \int_1^{+\infty} 8e^{-sx} dx$$

O primeiro integral é dado por

$$\int_0^1 -3xe^{-sx} dx = \left[ \frac{3(sx+1)e^{-sx}}{s^2} \right]_0^1 = \frac{3(s+1)e^{-s}}{s^2} - \frac{3}{s^2}$$

A convergência do segundo integral pode ser estudada pela existência do limite

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t 8e^{-sx} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{8e^{-sx}}{s} \right]_1^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{8e^{-st}}{s} + \frac{8e^{-s}}{s} \right]$$

Este limite só existe em  $\mathbb{R}$  se  $s > 0$  e neste caso

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{8e^{-st}}{s} + \frac{8e^{-s}}{s} \right] = \frac{8e^{-s}}{s}$$

Se  $s < 0$  o limite é  $+\infty$ . Observe-se que se  $s = 0$  temos o integral

$$\int_1^{+\infty} 8 dx$$

que é divergente (para  $+\infty$ ).

Assim, para  $s > 0$  temos

$$F(s) = \frac{11e^{-s}}{s} + \frac{3e^{-s}}{s^2} - \frac{3}{s^2} = \frac{(11s - 3e^s + 3)e^{-s}}{s^2}$$

**Exercício 6.2.1** Considere a função

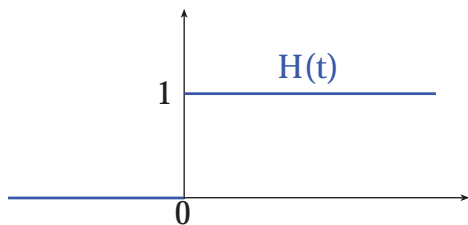
$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \geq 5 \\ 9x & \text{se } 0 \leq x < 5 \end{cases}$$

Justifique que a função  $f$  admite transformada de Laplace e mostre que

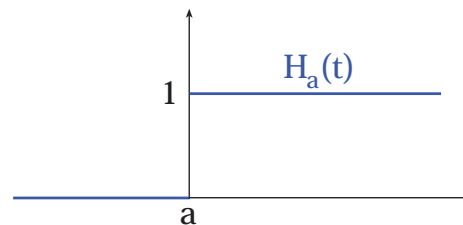
$$\mathcal{L}\{f\}(s) = -\frac{46e^{-5s}}{s} - \frac{9e^{-5s}}{s^2} + \frac{9}{s^2}$$

para todos os valores de  $s \in \mathbb{R}^+$ .

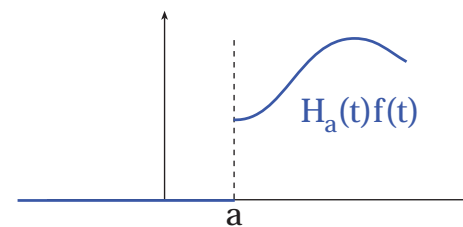
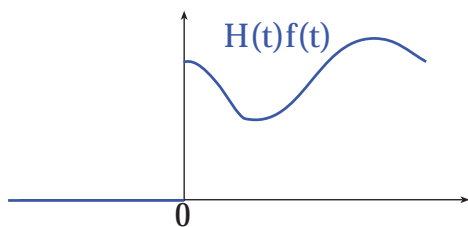
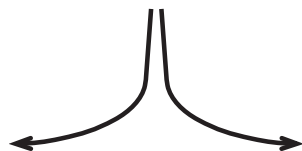
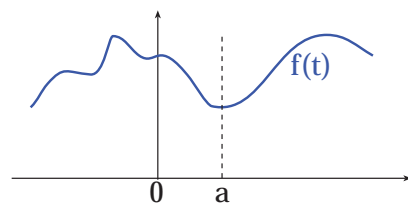
## Aula 26/27: Função de Heaviside



$$H(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ 1 & , t \geq 0 \end{cases}$$



$$H_a(t) = H(t - a) = \begin{cases} 0 & , t < a \\ 1 & , t \geq a \end{cases}$$



## Algumas fórmulas de derivação

$(k f)' = k f' \quad (k \in \mathbb{R})$	$(f^\alpha)' = \alpha f^{\alpha-1} f' \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
$(a^f)' = f' a^f \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+)$	$(\log_a f)' = \frac{f'}{f \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$
$(\operatorname{sen} f)' = f' \cos f$	$(\operatorname{cos} f)' = -f' \operatorname{sen} f$
$(\operatorname{tg} f)' = f' \sec^2 f = \frac{f'}{\cos^2 f}$	$(\operatorname{cotg} f)' = -f' \operatorname{cosec}^2 f = -\frac{f'}{\operatorname{sen}^2 f}$
$(\operatorname{arcsen} f)' = \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$	$(\operatorname{arccos} f)' = -\frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$
$(\operatorname{arctg} f)' = \frac{f'}{1+f^2}$	$(\operatorname{arccotg} f)' = -\frac{f'}{1+f^2}$

## Alguns desenvolvimentos em série de MacLaurin

- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots, \quad x \in ]-1, 1[$
- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}$
- $\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}$
- $\operatorname{cos} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}$

## Algumas transformadas de Laplace

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s), \quad s > s_f$$

função	transformada
$t^n \quad (n \in \mathbb{N}_0)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
$e^{at} \quad (a \in \mathbb{R})$	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$
$\operatorname{sen}(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$
$\operatorname{cos}(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\frac{s}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$
$\operatorname{senh}(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\frac{a}{s^2 - a^2}, \quad s >  a $
$\operatorname{cosh}(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\frac{s}{s^2 - a^2}, \quad s >  a $

função	transformada
$e^{\lambda t} f(t) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$	$F(s - \lambda)$
$H_a(t) f(t - a) \quad (a > 0)$	$e^{-as} F(s)$
$f(at) \quad (a > 0)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
$t^n f(t) \quad (n \in \mathbb{N})$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$f'(t) \quad (n \in \mathbb{N})$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t) \quad (n \in \mathbb{N})$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$
$f^{(n)}(t) \quad (n \in \mathbb{N})$	$s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$

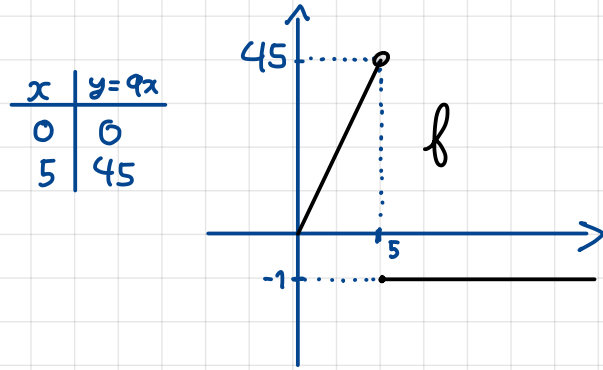


$$3) \int_0^{+\infty} \underbrace{t^{10}}_{f(t)} e^{-2t} dt = \mathcal{L}\{t^{10}\}(s) = \frac{10!}{s^{11}}$$

$$\mathcal{L}\{t^{10}\}(s) = \frac{10!}{s^{11}}, s > 0$$

$$4) f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \geq 5 \\ 9x & \text{se } 0 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

a) Gráficos de  $f$



$f$  é seccionalmente contínua <sup>ver aula 8</sup>

$$|f(x)| \leq 45, \forall x \geq 0$$

Logo, pelo teorema da planificação, existe T.L. de  $f$  para  $s > 0$  <sup>k</sup>

Tomando  $M = 45$  e  $k = 0$  temos que para qualquer  $T > 0$

$$|f(x)| \leq \underbrace{M}_{=45} e^{kx}, \forall x \geq T$$

b) Ver resolução completa do exemplo 6.2.1 da pág. 30 (a seguir à planificação), parecido com este exercício.

$$5) a) f(t) = e^{2t} t^2$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{e^{2t} \underbrace{t^2}_{g(t)}\}(s) \stackrel{\text{Propriedade 1}}{=} \mathcal{G}(s-2) = \frac{2}{(s-2)^3}, \underbrace{s > 0+2}_{s > 2}$$

c. aux.  $\mathcal{G}(s) = \mathcal{L}\{t^2\}(s) = \frac{2}{s^3}, s > 0$

ou:

$$\mathcal{L}\{e^{2t} t^2\}(s) = \mathcal{L}\{t^2\}(s-2) = \frac{2!}{s^3} \Big|_{s-2} = \frac{2!}{(s-2)^3}, \begin{matrix} s > 0+2 \\ s > 2 \end{matrix}$$

b) T.P.C.

$$c) \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$$

$$= \mathcal{L}\{e^{-t} \underbrace{\cos(4t)}_{g(t)}\}(s) = \mathcal{G}(s+1) = \frac{s+1}{(s+1)^2 - 16}, \begin{matrix} s > 4+(-1) \\ s > 3 \end{matrix}$$

$$l = -1$$

$$\mathcal{G}(s) = \mathcal{L}\{\cosh(4t)\}(s)$$

$$= \frac{s}{s^2 - 16}, s > 4$$

Nota:  $H(t-3) = H_3(t)$

$$6) a) \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{H(t-3) \underbrace{e^{t-3}}_{g(t-3)}\}(s) \stackrel{\text{Prop. 2}}{=} e^{-3s} \times \mathcal{G}(s) \\ = e^{-3s} \times \frac{1}{s-5}, s > 5$$

$$\text{Logo } g(t) = e^{5t} \rightsquigarrow \mathcal{G}(s) = \mathcal{L}\{e^{5t}\}(s) \\ = \frac{1}{s-5}, s > 5$$

b) T.P.C.

$$c) f(t) = H(t-5) \times (3t)$$

$$\mathcal{L}\{H(t-5) \times \underbrace{(3t)}_{g(t-5)}\}(s) \stackrel{\text{Prop. 2}}{=} e^{-5s} \times \mathcal{G}(s) = e^{-5s} \times \left(\frac{3}{s^2} + \frac{15}{s}\right), s > 0$$

$$3(t-5+5) \\ = \boxed{3(t-5) + 15}$$

$g(t-5)$

$$\text{Logo } g(t) = 3t + 15$$

$$\mathcal{G}(s) = \mathcal{L}\{3t + 15\}(s)$$

$$= 3 \mathcal{L}\{t\}(s) + 15 \mathcal{L}\{1\}(s) = 3 \times \frac{1}{s^2} + 15 \times \frac{1}{s}, s > 0$$

$$d) f(t) = H_\pi(t) \cos t$$

$$\mathcal{L}\{H_\pi(t) \underbrace{\cos t}_{g(t-\pi)}\}(s)$$

$a = \pi$

$$g(t-\pi) = \cos(t-\pi+\pi)$$

$$g(t) = \cos(t+\pi) = -\cos(t)$$

$$\mathcal{G}(s) = \mathcal{L}\{-\cos(t)\}(s)$$

$$= -\frac{s}{s^2+1}, s > 0$$

